

# Προσομοίωση ανελαστικής συμπεριφοράς κατασκευών από Οπλισμένο Σκυρόδεμα με θεώρηση διατμητικών παραμορφώσεων

Seismic assessment of reinforced concrete structures using a  
shear deformable beam-column element

Α.Γ. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΙΔΗΣ<sup>1</sup>, Μ. ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ<sup>2</sup>, Μ. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ<sup>3</sup>

Λέξεις κλειδιά : Ανελαστική συμπεριφορά, διατμητική αστοχία

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ** : Τα σύγχρονα υπολογιστικά προσομοιώματα κατασκευών Οπλισμένου Σκυροδέματος ενώ προλέγουν με επαρκή ακρίβεια την συμπεριφορά τους όταν κυριαρχεί καμπτική ένταση, αδυνατούν να δώσουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν υποβάλλονται σε σημαντικές διατμητικές δυνάμεις. Η αδυναμία προσομοίωσης της διατμητικής αστοχίας είναι ιδιαίτερα επικίνδυνη σε μέλη που δεν έχουν επαρκή διατμητικό οπλισμό π.χ. μέλη σχεδιασμένα με παλαιότερους κανονισμούς ή σε μέλη τα οποία λόγω των γεωμετρικών χαρακτηριστικών τους υπόκεινται σε αυξημένες τέμνουσες δυνάμεις όπως είναι τα τοιχώματα και τα κοντά υποστυλώματα. Στην παρούσα εργασία προτείνεται ένα στοιχείο δοκού-υποστυλώματος που βασίζεται στην μέθοδο των ινών (fiber approach). Η διατύπωση του στοιχείου ακολουθεί την μέθοδο των φυσικών μορφών παραμόρφωσης (natural mode method). Προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι διατμητικές παραμορφώσεις εισάγεται ένα επιπλέον δίπολο δυνάμεων στα άκρα του στοιχείου, το οποίο είναι σε ισορροπία με τις ροπές στα άκρα του στοιχείου. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν, συγκρίνονται με αναλυτικές λύσεις και με πειραματικά αποτελέσματα και γίνεται παραμετρική διερεύνηση με αντίστοιχα αποτελέσματα από προσομοιώματα στα οποία η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων αγνοείται.

---

<sup>1</sup> Πολιτικός Μηχανικός, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 15780 Αθήνα, [aristidi@central.ntua.gr](mailto:aristidi@central.ntua.gr)

<sup>2</sup> Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Ερευνητικός Συνεργάτης, ΕΜΠ, [mfrag@central.ntua.gr](mailto:mfrag@central.ntua.gr)

<sup>3</sup> Καθηγητής, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ, [mpapadra@central.ntua.gr](mailto:mpapadra@central.ntua.gr)

**ABSTRACT :** Based on the natural mode method of Argyris, a flexibility-based fiber beam-column element has been developed. The formulation presented is based on the fiber approach, which has been successfully applied for the capacity assessment of frame structures for several decades. However, it is well-known that this modelling is not suitable for members whose response is not flexure-dominated. This shortcoming stems from the kinematics of linear elements that allow the calculation only of one component of the strain tensor, the principal longitudinal strain. The proposed element has been enhanced with the capacity to calculate the transverse shear strains. This modification makes the element suitable for the inelastic analysis of members subjected to high shear forces, such as shear walls or thick beams and also allows the assessment of members likely to fail in shear, such as under-reinforced RC columns. The formulation of the element is free of the very common for this family of elements “shear-locking” problem, while it offers increased accuracy compared to traditional displacement-based fiber elements. The proposed FE formulation uses separate material models for flexure and shear. Different material laws for the shear component are examined, varying from linear (infinite shear capacity) to more sophisticated that account for the gradual loss of the shear capacity. This approximation helps maintaining the option of simple and robust uniaxial relationships, traditionally adopted together with fiber elements, thus avoiding multi-dimensional constitutive laws. Numerical examples validating the efficiency of the proposed scheme are presented.

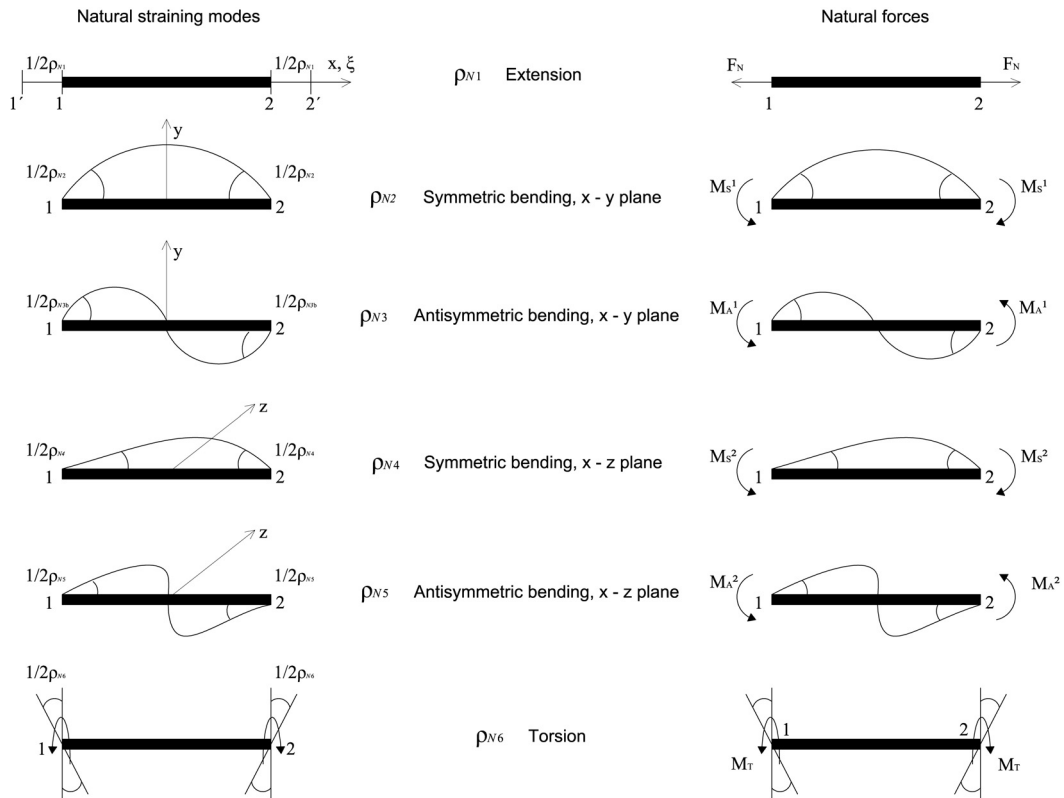
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά την ανελαστική προσομοίωση κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος με χρήση στοιχείων δοκού-υποστυλώματος (beam-column elements) υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι θεώρησης της ανελαστικής συμπεριφοράς: με συγκεντρωμένη πλαστικότητα ή με κατανεμημένη πλαστικότητα. Στην περίπτωση της συγκεντρωμένης πλαστικότητας οι πλαστικές αρθρώσεις θεωρούνται στα άκρα ενός ελαστικού μέλους και υπολογίζονται από τις σχέσεις ροπών - γωνιών στροφής των ακραίων διατομών για συγκεκριμένη αξονική δύναμη. Στην περίπτωση της κατανεμημένης πλαστικότητας είναι δυνατός ο σχηματισμός πλαστικών περιοχών σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος του μέλους, ενώ παράλληλα η ανελαστικότητα εξετάζεται σε όρους τάσεων - ανηγμένων παραμορφώσεων επιτρέποντας την αλληλεπίδραση αξονικής δύναμης και ροπών. Τα στοιχεία με κατανεμημένη πλαστικότητα που υπάρχουν στην βιβλιογραφία μπορούν να καταταχθούν σε στοιχεία μετατοπίσεων (displacement-based) και στοιχεία δυνάμεων (force-based). Λεπτομερής σχολιασμός των

στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας μπορεί να βρεθεί στους Παραιοαννου (2005) και Comitee Euro-International du Beton (1996). Το βασικό πλεονέκτημα του στοιχείου δυνάμεων είναι ότι απαιτείται μόνο ένα στοιχείο δοκού-υποστυλώματος για κάθε δομικό μέλος της κατασκευής (δοκός ή υποστύλωμα), προκειμένου να προσομοιωθεί η ανελαστική του συμπεριφορά, σε αντίθεση με τα στοιχεία μετατοπίσεων στα οποία απαιτείται πύκνωση του δικτύου στα σημεία όπου αναμένεται ο σχηματισμός πλαστικών περιοχών (Neuenhofer, 1997).

Βασική αδυναμία των στοιχείων δοκού είναι ότι δεν μπορούν να προσεγγίσουν την συμπεριφορά στοιχείων που εμφανίζουν υψηλές διατμητικές τάσεις ή αστοχούν σε διάτμηση πριν τον σχηματισμό πλαστικών αρθρώσεων. Στα πεπερασμένα στοιχεία δύο ή τριών διαστάσεων οι διατμητικές τάσεις υπολογίζονται κατευθείαν από τις συναρτήσεις σχήματος, στα στοιχεία δοκού όμως δεν υπάρχουν διατμητικές παραμορφώσεις (θεώρηση Euler-Bernoulli) ή είναι σταθερές για τα στοιχεία με διατμητικές παραμορφώσεις (θεώρηση Timoshenko). Αναλυτική περιγραφή της έρευνας των τελευταίων χρόνων στο συγκεκριμένο αντικείμενο έχει γίνει από την Ceresa (2007). Ο Petrangeli (1997) πρότεινε ένα στοιχείο δοκού-υποστυλώματος που λαμβάνει υπόψη τις διατμητικές παραμορφώσεις, όπου οι ανηγμένες παραμορφώσεις  $\varepsilon_x$  και  $\gamma_{xy}$  υπολογίζονται από τις καταστατικές σχέσεις του στοιχείου, ενώ η εγκάρσια παραμόρφωση  $\varepsilon_y$  υπολογίζεται με ισορροπία μεταξύ των στρώσεων (fibers) χάλυβα και σκυροδέματος. Παρόμοια θεώρηση υπάρχει και από τον Saritas (2004) για την δυναμική ανάλυση πλαισίων από χάλυβα. Η Marini (2006) χρησιμοποίησε στοιχείο δοκού-υποστυλώματος με διατμητικές παραμορφώσεις, αλλά υιοθετώντας ξεχωριστό καταστατικό νόμο για τις διατμητικές τάσεις.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται στοιχείο δοκού-υποστυλώματος που ακολουθεί τις κινηματικές σχέσεις του BEC (BEam Composites, Argyris, 1988). Το στοιχείο βασίζεται στην μέθοδο των φυσικών μορφών (Argyris, 1963), όπου το πεδίο των 12 μετατοπίσεων αναλύεται σε 6 μετατοπίσεις στερεού σώματος, που δεν προκαλούν ένταση στο στοιχείο, και σε 6 φυσικές μορφές παραμόρφωσης (βλ. Σχήμα 1). Στη συνέχεια μορφώνεται το φυσικό μητρώο στιβαρότητας του μέλους, θεωρώντας μόνο τις 6 φυσικές μορφές παραμόρφωσης. Το στοιχείο που προτείνεται δεν πάσχει από το πρόβλημα του "διατμητικού κλειδώματος" (shear-locking) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση μελών κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος σε μονοτονική ή ανακυκλιζόμενη φόρτιση.



**Σχήμα 1** Φυσικές μορφές παραμόρφωσης και φυσικές δυνάμεις

## ΜΟΡΦΩΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΥΝΑΜΕΩΝ BEC

### Μέθοδος φυσικών μορφών

Σε στοιχείο δοκού-υποστυλώματος με έξι βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο το πεδίο των μετατοπίσεων αναλύεται σε 6 μετατοπίσεις στερεού σώματος  $\rho_0$  και σε 6 φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $\rho_N$ , οι οποίες συνθέτουν το διάνυσμα  $\rho$ :

$$\rho = [\rho_0 \quad \rho_N] \quad (1)$$

Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $\rho_N$  αποτελούνται από την μορφή επιμήκυνσης,  $\rho_{N1}$ , δύο συμμετρικές μορφές κάμψης,  $\rho_{N2}$  και  $\rho_{N4}$ , δύο αντισυμμετρικές μορφές κάμψης,  $\rho_{N3}$  και  $\rho_{N5}$  και την μορφή στρέψης  $\rho_{N6}$  (Σχήμα 1). Αντίστοιχα με τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης ορίζεται το διάνυσμα των φυσικών δυνάμεων  $\mathbf{P}_N$  (Σχήμα 1).

$$\mathbf{P}_N = [P_{N1} \ P_{N2} \ P_{N3} \ P_{N4} \ P_{N5} \ P_{N6}]^T = [F_N \ M_S^y \ M_A^y \ M_S^z \ M_A^z \ M_T]^T \quad (2)$$

Αν  $\xi=2x/L-1$ , όπου  $\xi \in [-1,1]$  είναι η φυσική συντεταγμένη κατά μήκος του μέλους,  $u$  είναι η παραμόρφωση κατά μήκος του μέλους και  $v, w$  είναι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις, οι φυσικές μορφές και το πεδίο μετατοπίσεων του μέλους συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{8}(1-\xi^2) & \frac{L}{8}(\xi^3-\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{8}(1-\xi^2) & \frac{L}{8}(\xi^3-\xi) & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_N \quad (3)$$

Η σχέση που συσχετίζει τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης και τις επικόμβιες μετατοπίσεις στο τοπικό σύστημα  $\mathbf{u}_{el}$  είναι:

$$\boldsymbol{\rho}_N = \mathbf{a}_N \mathbf{u}_{el} \quad (4)$$

όπου,

$$\mathbf{a}_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Από την ισορροπία στο φυσικό σύστημα:  $\mathbf{P}_N = \mathbf{K}_N \boldsymbol{\rho}_N$ , όπου  $\mathbf{K}_N$  είναι το φυσικό μητρώο στιβαρότητας. Εφαρμόζοντας την εξίσωση (4) στις φυσικές μορφές παραμόρφωσης και στις φυσικές δυνάμεις το Καρτεσιανό μητρώο στιβαρότητας  $\mathbf{K}_e$  δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{a}_N^T \mathbf{K}_N \mathbf{a}_N \quad (6)$$

Οι εσωτερικές δράσεις  $\mathbf{D}_{sec}$  της τυχαίας διατομής  $\xi_0$  υπολογίζονται από τις φυσικές δυνάμεις με την χρήση του μητρώου  $\mathbf{b}$ , ως εξής:

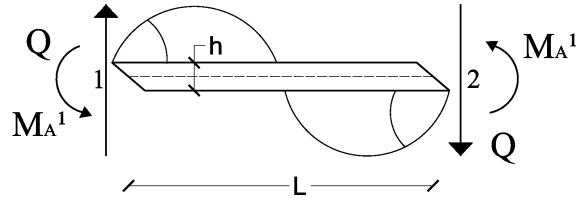
$$\mathbf{D}_{\text{sec}}(\xi_0) = \mathbf{b}(\xi_0) \mathbf{P}_N \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{N1} \\ P_{N2} \\ P_{N3} \\ P_{N4} \\ P_{N5} \\ P_{N6} \end{bmatrix} \quad (7)$$

όπου  $N_0$  και  $M_{0y}, M_{0z}$  είναι η αξονική δύναμη και οι καμπτικές ροπές της διατομής αντίστοιχα. Επιπροσθέτως, αν  $\mathbf{d}_{\text{sec}} = [\varepsilon_x, \kappa_y, \kappa_z]^T$  είναι το διάνυσμα των παραμορφώσεων της διατομής, αποτελούμενο από την επιμήκυνση  $\varepsilon_x$  και τις καμπυλότητες  $\kappa_y, \kappa_z$  τότε ισχύει:

$$\rho_N = \int_{-1}^1 \mathbf{b}^T(\xi) \mathbf{d}_{\text{sec}} d\xi \quad (8)$$

### Προσθήκη διατμητικών παραμορφώσεων

Στην περίπτωση που οι διατμητικές δυνάμεις επηρεάζουν την συμπεριφορά του μέλους τότε ένα ζεύγος διατμητικών δυνάμεων πρέπει να εισαχθεί στο στοιχείο (Σχήμα 2). Αν  $L$  είναι το μήκος του στοιχείου, η διατμητική δύναμη  $Q$  θα ισούται με  $2M_A/L$ . Η θεώρηση του στοιχείου είναι συμβατή με αυτή της θεωρίας Timoshenko.



Σχήμα 2 Φυσικές μορφές παραμόρφωσης και φυσικές δυνάμεις

Οπότε, για το στοιχείο με διατμητικές παραμορφώσεις η εξίσωση (7) γίνεται:

$$\mathbf{D}_{\text{sec}} = \mathbf{b}(\xi_0) \mathbf{P}_N \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{0y} \\ M_{0z} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{N1} \\ P_{N2} \\ P_{N3} \\ P_{N4} \\ P_{N5} \\ P_{N6} \end{bmatrix} \quad (9)$$

όπου  $V_{0y}$  και  $V_{0z}$  είναι οι διατμητικές δυνάμεις της διατομής.

### Μόρφωση μητρώου στιβαρότητας

Προκειμένου να υπολογισθεί αριθμητικά το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου εκλέγεται ένας αριθμός διατομών κατά μήκος του στοιχείου και κάθε διατομή διαιρείται σε αριθμό σημείων ελέγχου (ίνες - fibers). Το μητρώο στιβαρότητας της κάθε διατομής προκύπτει με ολοκλήρωση - άθροισμα πάνω σε όλες τις ίνες σύμφωνα με την σχέση (10):

$$\mathbf{k}_{\text{sec}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i & -\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i z_i & 0 & 0 \\ -\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i^2 & -\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i z_i & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i z_i & -\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i z_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dV_y}{d\gamma_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dV_z}{d\gamma_{xz}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

όπου  $y_i$  και  $z_i$  είναι οι συντεταγμένες της κάθε ίνας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής. Οι εσωτερικές δυνάμεις σε κάθε διατομή υπολογίζονται από τη σχέση:

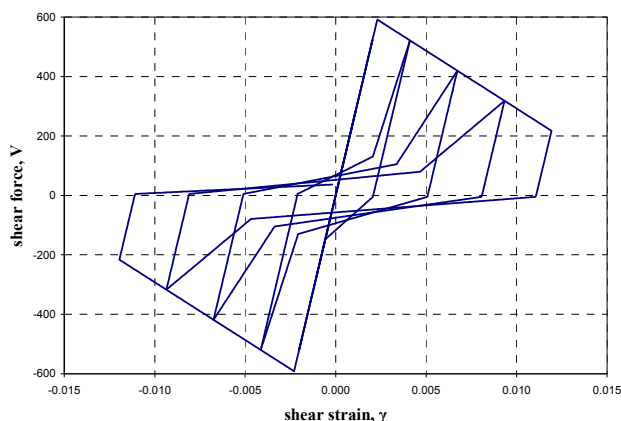
$$\mathbf{D}_{\text{sec}}(\xi) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i \\ -\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_i A_i z_i \\ V_y(\gamma_{xy}) \\ V_z(\gamma_{xz}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Αν το μητρώο ευκαμψίας της διατομής είναι  $\mathbf{f}_{\text{sec}} = \mathbf{k}_{\text{sec}}^{-1}$ , τότε το μητρώο ευκαμψίας του μέλους  $\mathbf{F}_N = (\mathbf{K}_N)^{-1}$ , προκύπτει από αριθμητική ολοκλήρωση (Gauss-Lobatto) και είναι:

$$\mathbf{F}_N = (\mathbf{K}_N)^{-1} = \int_{-1}^1 \mathbf{b}^T \mathbf{f}_{\text{sec}} \mathbf{b} d\xi = \sum_{i=1}^{NP} w_i \mathbf{b}^T(\xi_i) \mathbf{f}_{\text{sec}}(\xi_i) \mathbf{b}(\xi_i) \quad (12)$$

## ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ ΥΛΙΚΩΝ

Για τον υπολογισμό του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας και των εσωτερικών δυνάμεων της διατομής, στις εξισώσεις (12) και (11) αντίστοιχα, πρέπει να επιλεγούν κατάλληλοι καταστατικοί νόμοι. Πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ότι μπορούν να επιλεγούν διαφορετικοί καταστατικοί νόμοι σε κάθε ίνα της διατομής όπως και για τις διατμητικές παραμορφώσεις. Για μέλη από χάλυβα ή για τον οπλισμό σε διατομές οπλισμένου σκυροδέματος εκλέγεται ένας διγραμμικός καταστατικός νόμος με κράτυνση. Για τις ίνες σκυροδέματος εκλέγεται το τροποποιημένο μοντέλο Kent-Park, όπως διατυπώθηκε από τον Kent (1973) και επεκτάθηκε από τον Scott (1982). Τρεις διαφορετικές θεωρήσεις εξετάστηκαν για τον υπολογισμό των διατμητικών όρων. Στην πρώτη περίπτωση αγνοείται η επιρροή της διάτμησης (θεώρηση Euler-Bernoulli). Στην δεύτερη περίπτωση θεωρείται άπειρη διατμητική αντοχή, δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη διατμητική αστοχία, και η κλίση του λόγου  $dV/d\gamma$  (Εξίσωση (10)) είναι σταθερή και ίση με το γινόμενο  $GA$ . Τέλος, ένας μονοαξονικός νόμος  $V$ - $\gamma$  υιοθετείται για την απομείωση της διατμητικής αντοχής. Ο νόμος αυτός μπορεί να είναι απλά διγραμμικός με αρνητική κράτυνση ή πιο πολύπλοκος που να λαμβάνει υπόψη και την απομείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής κατά την ανακύκλιση (Σχήμα 3) (Lowes, 2004), όπου  $V_{max}$  είναι η μέγιστη διατμητική αντοχή και  $V_{min}$  η απομένουσα διατμητική αντοχή κατά την αστοχία. Η αναλυτική έκφραση του νόμου αυτού μπορεί να προκύψει από τις σχέσεις που έγινε ο σχεδιασμός των μελών του οπλισμένου σκυροδέματος σε διάτμηση (ASCE, 1998) όπως ο EC2 (European Committee for Standardisation, 2000) ή κατά την Modified Compression Field Theory των Vecchio και Collins (1986).



**Σχήμα 3** Παράδειγμα μονοαξονικού ανακυκλιζόμενου νόμου διατμητικής τάσης - γωνιακής παραμόρφωσης, για την θεώρηση διατμητικής αστοχίας



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### Αμφιαρθρωτή δοκός με κατανεμημένο φορτίο

Το πρώτο αριθμητικό παράδειγμα που εξετάστηκε είναι μία αμφιαρθρωτή δοκός με κατανεμημένο φορτίο  $q$ , μήκος  $L$ , ελαστικές σταθερές  $E$  και  $G$ , διατομή εμβαδού  $A$  και ροπή αδράνειας  $I$ . Το πρόβλημα αυτό έχει παρουσιασθεί από τον Taylor (2003) σαν πρότυπο παράδειγμα για στοιχεία δοκού που λαμβάνουν υπόψη έργα από διάτμηση. Για γραμμικά ελαστική ανάλυση οι ακριβείς τιμές της μετατόπισης στο μέσον του ανοίγματος  $w_{\max}$  και η στροφή στα άκρα  $\theta_{\max}$  δίνονται από τις εξισώσεις:

$$w_{\max} = \frac{qL^4}{24EI} \left[ \frac{5}{16} + \left( \frac{t}{L} \right)^2 0.5a(1+\nu) \right] \quad (13)$$

$$\theta_{\max} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{qL^3}{24EI} \left[ 1 + \left( \frac{t}{L} \right)^2 a(1+\nu) \right] \quad (14)$$

όπου  $a$  είναι ο συντελεστής διόρθωσης ίσος με  $6/5=1.20$ ,  $\nu$  ο λόγος Poisson και  $t$  το ύψος της διατομής.

**Πίνακας 1.** Μέγιστη παραμόρφωση στο μέσον του ανοίγματος  $w_{\max}$  και στροφή στα άκρα  $\theta_{\max}$  καθώς και σφάλμα (%) από την ακριβή λύση

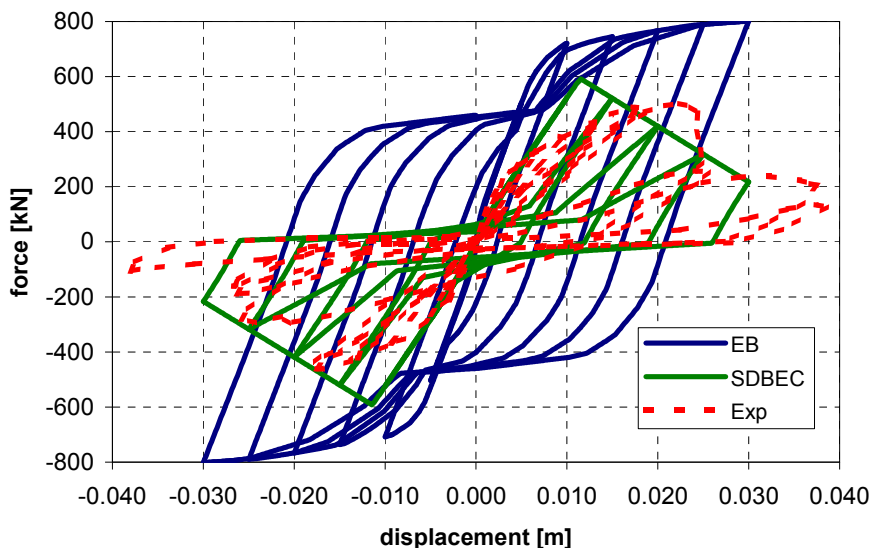
$t$	$w_{\max}$ (exact)	$w_{\max}$ SD (error %)	$w_{\max}$ EB (error %)	$\theta_{\max}$ (exact)	$\theta_{\max}$ SD (error %)	$\theta_{\max}$ EB (error %)
1	15.62875000	15.62875000 0.00	15.62500000 0.02	-0.50003750	-0.50003750 0.00	-0.50000000 0.01
5	0.12575000	0.12575000 0.00	0.12500000 0.06	-0.00400750	-0.00400750 0.00	-0.00400000 0.19
10	0.01600000	0.01600000 0.00	0.01562500 2.34	-0.00050375	-0.00050375 0.00	-0.00050000 0.74
20	0.00214063	0.00214064 0.00	0.00195313 8.76	-0.00006438	-0.00006438 0.00	-0.00006250 2.91
100	0.00005313	0.00005313 0.00	0.00001563 70.59	-0.00000088	-0.00000088 0.00	-0.00000050 42.86
200	0.00002070	0.00002070 0.00	0.00000195 90.57	-0.00000025	-0.00000025 0.00	-0.00000006 75.00

Αγνοώντας τους δεύτερους όρους εντός των αγκυλών στις εξισώσεις (13) και (14) καταλήγουμε στη θεώρηση Euler-Bernoulli. Είναι προφανές ότι όσο το ύψος της διατομής αυξάνεται, η συνεισφορά των διατμητικών όρων γίνεται εντονότερη. Εξετάστηκε η περίπτωση:  $E=10^6$ ,  $L=100$ ,  $\nu=0.25$ ,  $b=1$  και  $q=1$ . Στον Πίνακα 1

εμφανίζονται τα αποτελέσματα, για αυξανόμενες τιμές του  $t$ , στην περίπτωση της αναλυτικής λύσης (exact), της θεώρησης διατμητικών παραμορφώσεων (SD) και της θεώρησης χωρίς διατμητικές παραμορφώσεις (EB) καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα από την ακριβή λύση. Επιπλέον, από τον πίνακα αποδεικνύεται ότι το στοιχείο δεν πάσχει από το πρόβλημα του "διατμητικού κλειδώματος".

### Μονοτονική και ανακυκλιζόμενη ανάλυση βάρου

Το επόμενο αριθμητικό παράδειγμα είναι το υποστύλωμα-βάθρο γέφυρας που εξετάστηκε από την Marini (2006). Στο παράδειγμα αυτό διερευνάται η εφαρμοσιμότητα της προτεινόμενης μεθόδου με χρήση ασύζευκτου (ως προς την καμπτική λειτουργία) καταστατικού νόμου διάτμησης  $V$ - $\gamma$ . Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον νόμο διάτμησης  $V$ - $\gamma$  που εκλέχθηκε μπορεί να βρεθεί στον Lowes (2004). Σύμφωνα με τις διατάξεις του EC2, η μέγιστη αντοχή σε διάτμηση για τις συγκεκριμένες διαστάσεις, ποιότητα υλικών και οπλισμό της διατομής είναι ίση με  $V_{max}=590\text{kN}$  και η διάτμηση κατά την αστοχία είναι  $V_{min}=98\text{kN}$ . Η παράμετρος απομείωσης της αντοχής κατά την ανακύκλιση θεωρήθηκε ίση με 0.90. Το υποστύλωμα φορτίστηκε με σταθερό αξονικό φορτίο ίσο με 507.3kN και στη συνέχεια εφαρμόστηκε ανακυκλιζόμενη μετατόπιση στην κορυφή του. Το υπολογιστικό μοντέλο αποτελείται από ένα στοιχείο BEC με πέντε διατομές ολοκλήρωσης. Οι διαστάσεις της διατομής είναι  $406 \times 610\text{mm}^2$  και το ύψος ίσο με 2.35m. Ο διαμήκης οπλισμός αποτελείται από 22 ράβδους διαμέτρου 19mm (22Ø19) ομοιόμορφα καταναμημένες στην περίμετρο.



Σχήμα 4 Καμπύλη δύναμης-μετατόπισης υποστυλώματος υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση

Εξετάσθηκαν οι περιπτώσεις με (SD) και χωρίς (EB) θεώρηση διατμητικών παραμορφώσεων και οι καμπύλες που προέκυψαν συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα (Exp), όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 4. Όταν τα διατμητικά φαινόμενα αγνοούνται η αντοχή του υποστυλώματος αυξάνεται αναλογικά με το φορτίο. Η απόκριση με αυτή την θεώρηση μπορεί να θεωρηθεί επαρκής μόνο στους πρώτους κύκλους φόρτισης, για μετατοπίσεις αρκετά μικρότερες από 0.010m. Από την άλλη πλευρά, όταν εφαρμόζεται η προτεινόμενη θεώρηση λαμβάνοντας υπόψη τις διατμητικές παραμορφώσεις παρατηρείται σταδιακή μείωση της αντοχής. Έτσι, για την μέγιστη παραμόρφωση ίση με 0.03m, η αντοχή μειώνεται από 789kN σε 209kN. Η καμπύλη με θεώρηση διατμητικών παραμορφώσεων είναι πιο κοντά στα πειραματικά αποτελέσματα, σε αντίθεση με αυτή των στοιχείων που δεν λαμβάνουν υπόψη τις διατμητικές παραμορφώσεις και υπερεκτιμούν την αντοχή του υποστυλώματος.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε στοιχείο δοκού-υποστυλώματος βασισμένο στην θεώρηση φυσικών μορφών παραμόρφωσης το οποίο λαμβάνει υπόψη και διατμητικές παραμορφώσεις. Το στοιχείο είναι ικανό να προσομοιώσει ικανοποιητικά μέλη που αστοχούν διατμητικά σε μονοτονική ή σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Το στοιχείο αυτό υιοθετεί διαφορετικές καταστατικές σχέσεις για τις καμπτικές και διατμητικές παραμορφώσεις κάνοντας δυνατή την χρήση μονοαξονικών καταστατικών νόμων. Για τους διατμητικούς όρους μπορούν να υιοθετηθούν διγραμμικές ή υστερητικές εξισώσεις προκειμένου να προσομοιωθούν μέλη με ανεπαρκή διατμητική αντοχή. Τα αποτελέσματα με θεώρηση διατμητικών παραμορφώσεων είναι πιο κοντά τόσο στις ακριβείς λύσεις για ελαστική ανάλυση, όσο και στα πειραματικά αποτελέσματα σε ανελαστική ανάλυση.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Argyris, J.H. (1963), "Recent Advances in Matrix Methods for Structural Analysis," *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 4, Pergamon Press.

Argyris, J., Tenek, L. and Mattsson, A. (1988), "BEC: A 2-node fast converging shear-deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid-body and 6 straining modes," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 152, pp. 281-336.

ASCE-ACI Committee 445 on Shear and Torsion (1998), "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 124(12), pp. 1375-1417.

Bairan, G.J.M. and Mari, A.R. (2007), "Shear-Bending-Torsion Interaction in Structural Concrete Members: A Nonlinear Coupled Sectional Approach," *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 249-278.

Ceresa, P., Petrini, L. and Pinho, R. (2007), "Flexure-shear fiber beam-column elements for modeling frame structures under seismic loading - State of the art," *Journal of Earthquake Engineering*, Vol. 11, pp. 46-88.

Comitee Euro-International du Beton, C. L. F. (1996). RC frames under earthquake loading: State of the art report. 231.

European Committee for Standardisation, (2000), "Eurocode 2 (EC2) Design of Concrete Structures - Part 1: General Rules and Rules for Buildings", Brussels, Belgium, 2000.

Kent, D.C. and Park, R. (1973), "Flexural members with confined concrete," *Journal of Structural Division*, Vol. 96.

Lowes, L.N, Mitra, N. and Altoontash, A. (2004), "A Beam-Column Joint Model for Simulating the Earthquake Response of Reinforced Concrete Frames", Report No. PEER 2003/10, Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, Berkeley, California.

Marini, A. and Spacone, E. (2006), "Analysis of reinforced concrete elements including shear effects," *ACI Structural Journal*, Vol. 103, pp. 645-655.

Navarro, G.J., Miguel, S.P., Fernandez, P.M.A and Flippou, F.C. (2007), "A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading," *Engineering Structures*, Vol. 29, pp. 3404-3419.

Neuenhofer, A. and Filippou, F.C. (1997), "Evaluation of nonlinear frame finite-element models," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, pp. 958-966.

Papaioannou, I., Fragiadakis, M. and Papadrakakis, M. (2005), "Inelastic analysis of framed structures using the fiber approach," *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Congress on Computational Mechanics (GRACM 05)*, Limassol, Cyprus, 29 June-1 July 2005, Vol. 1, pp. 231-238.

Petrangeli, M. and Ciampi, V. (1997), "Equilibrium based iterative solutions for the non-linear beam problem," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 423-437.

Saritas, A. and Filippou, F.C. (2004), "Modeling of Shear Yielding Members for Seismic Energy Dissipation," *Proceedings of the 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, BC, Canada.

Scott, B.D., Park, R. and Priestley, M.J.N. (1982), "Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates," *ACI Journal*, Vol. 79, pp. 13-27.

Spacone, E, Filippou, F.C. and Taucer, F.F. (1996), "Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, pp. 711-725.

Taylor, R.L.T, Filippou, F.C., Saritas, A. and Auricchio, F. (2003), "A mixed finite element method for beam and frame problems," *Computational Mechanics*, Vol. 31, pp. 192-203.

Vecchio, F.J. and Collins, M.P. (1986), "Modified Compression-Field Theory For Reinforced Concrete Elements Subjected To Shear," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 83, pp. 219-231.